

EML 2005, math 1, option économique

EXERCICE 1

On considère les éléments suivants de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I , J et K .

Pour toute matrice M de E , on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k , $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1) Déterminer la dimension de E .

2) Calculer J^2 , JK , KJ et K^2 .

3) Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

c) Exprimer, pour tout entier relatif n , L^n à l'aide de I , L , L^2 et n .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3

représenté par la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^3 et e l'application identique de \mathbb{R}^3 dans lui-même.

4) Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.

Est-ce que f est diagonalisable ?

5a) Soit $w = (1, 0, 0)$.

Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.

Montrer que (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w) .

c) Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et, pour tout entier relatif n , exprimer f^n à l'aide de e , f , f^2 et n .

EXERCICE 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t , par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

2) Montrer que f est une densité de probabilité.

3) Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ converge, et calculer cette intégrale.

On distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$.

4) Déterminer un réel positif α tel que $\int_0^\alpha f(t) dt = \frac{1}{2}$.

5) Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

On considère la fonction φ_x définie sur $[0; +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[$, $\varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t) dt$.

a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_x(u)$.

b) Montrer : $\forall (u, v) \in ([0, +\infty[)^2, u < v \implies \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t) dt$.

En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

c) On admet que φ_x est continue sur $[0; +\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$, d'inconnue u , admet une solution et une seule dans $[0; +\infty[$.

On note $U : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0; +\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t) dt = \frac{1}{2}$.

6)a) Vérifier, pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}[$: $U(x) = 1 - x$.

b) Pour tout $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$, montrer : $\varphi_x(x) \geq \frac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geq 0$, et en déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

7)a) Montrer que l'application U est continue sur $[0; +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de U sur $[0; +\infty[$.

c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U .

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U .

8) On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U(a_n) \end{cases}$

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\frac{1}{2}$.

d) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leq 10^{-6}$$

EXERCICE 3

1) **Préliminaire :**

Soit $x \in]0; 1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x , on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ de la façon suivante :

- pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n -ième succès ;

- T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n -ième succès après le $(n-1)$ -ième succès.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n .

b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires T_1, T_2, \dots, T_n .

c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer : $E(S_n) = \frac{n}{1-x}$ et $V(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$.

d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n .

Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k)$?

e) En déduire, pour tout $x \in]0; 1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} C_{k-1}^{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2) Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0; 1[$), et la probabilité d'obtenir face est $q = 1 - p$.

Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A .

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B .

a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.

b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

c) Montrer : $P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$.

d) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $P(Y = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} C_k^n p^{n+1} q^{2k-n-1}$,

puis, en utilisant **1.e**,

$$P(Y = n) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$$