EDHEC 2005
Option économique

–

Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille(J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)\,I$ où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3 et J_4.
   b) Vérifier que la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   c) Justifier que f est diagonalisable.
3. a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   b) Écrire la matrice D de f dans cette base.
   c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = P\,D\,P^{-1}$
4. a) Déterminer la matrice P^{-1}.
   b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n P^{-1}$
   c) En déduire explicitement la matrice A^n.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x\,e^{x\left(y^2+1\right)}$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. a) Déterminer les dérivées partielles premières de f
   b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
3. a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
   b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
4. a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq x\,e^x$.
   b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \notin [0,1[\end{cases}$

   a) Pour tout x de $[0,1[$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

   b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.

   c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

   On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition.

2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3. a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x

   b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.

4. a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$.

   b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.

   c) Exprimer X en fonction de Y, puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a.

   d) Montrer que la variable aléatoire e e^{-2Y} possède une espérance et que $E\left(e^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$

   En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

   b) Donner la loi de X_1.

   c) En déduire $\mathrm{P}(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [[0, n]]$

   b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - p$

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}\,,\ \mathrm{P}(X_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(X_n = k-1)$

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$, $\mathrm{P}(X_n = k) = p^k(1-p)\,.$
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

   c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) = 1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
   On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
   Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
     Readln(n) ;
     Randomize ;
     X :=0 ;
     For k :=1 to n do
     begin
          u := random(3) ;
          if (u = 2) then X :=......... ;
               else X :=....... ;
          end ;
     Writeln (X) ;
end.
```

5. a) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$

   b) En déduire que $E(X) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ E\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E(X_n) + 1\right)$.

   b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$
   Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$

   c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

   d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$