(épreuve esc 2006 éco)

EXERCICE 1

1. La méthode du pivot fournit : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 0 & -2 & 1-\alpha \\ 0 & -3 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 0 & -2 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{pmatrix}$

et donc P_α inversible ssi $\alpha \neq 3$

2. (a)

λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda$ I n'est pas inversible. Avec la méthode du pivot $\begin{pmatrix} 5-\lambda & -8 & 4 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 5-\lambda & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -8+\lambda(5-\lambda) & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -8+\lambda(5-\lambda) & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

Donc λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow Q(\lambda) = 0$.

(b) $Q(1) = 0$, on peut donc factoriser Q(x) par x – 1. On obtient

$Q(x) = (x-1)(-x^2 + 4x - 4) = -(x-1)(x-2)^2$. Les valeurs propres de A sont 1 et 2.

c) $E_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est libre et engendre E_1 donc c'est une base de E_1

$E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est libre et engendre E_2 donc c'est une base de E_2

$\dim(E_1) + \dim(E_2) = 2 < \dim(\mathbb{R}^3)$ donc A n'est pas diagonalisable.

3.

(a) $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$, $f(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$ **;**

$$f(\vec{v}_3) = \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha_0 - 8 = 4 + 2\alpha_0 \\ \alpha_0 = 4 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_0 = 4$$

(b) $\alpha_0 \neq 3$ donc P_{α_0} est inversible .

Comme P_{α_0} est la matrice de passage de BC à $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, B ' est libre.

B ' est libre et de cardinal 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$

(c) $P_{\alpha_0}\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$, $f(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$, $f(\vec{v}_3) = \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ donc $\underset{B'}{Mat}(f) = T$

Par formule de changement de base, $A = P_{\alpha_0}\, T\, P_{\alpha_0}^{-1}$.

(e) Récurrence : $P(0)$ est vraie car $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & 0.2^{-1} \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I$ **;**

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + n2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \text{ donc } P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

4.

(a) $$Y_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+3}\\u_{n+2}\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5u_{n+2}-8u_{n+1}+4u_n\\u_{n+2}\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-8&4\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+2}\\u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}=AY_n\,.$$

(b) $H(0)$ est vraie car $P_{\alpha_0}P_{\alpha_0}^{-1}\,Y_0=Y_0$

$Y_{n+1}=AY_n=A\,P_{\alpha_0}T^n\,P_{\alpha_0}^{-1}\,Y_0=P_{\alpha_0}T\,P_{\alpha_0}^{-1}\,P_{\alpha_0}T^n\,P_{\alpha_0}^{-1}\,Y_0=P_{\alpha_0}T^{n+1}\,P_{\alpha_0}^{-1}\,Y_0$ donc $H(n)\Rightarrow H(n+1)$

D'après 4.(b) et 3.(c) ,

$$\mathrm{Y_n}=\mathrm{P}_{\alpha_0}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-8.2^n+6n.2^{n-1}\\6.2^n\end{pmatrix}$$

donc en identifiant la troisième ligne , $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=9-8.2^n+6n.2^{n-1}$

EXERCICE 2

1.(a) $g'(x)=e^x-1$ donc $g'(x)>0\Leftrightarrow x>0$, $g'(x)<0\Leftrightarrow x<0$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

(b) g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0\,[$ et continue sur ce même intervalle.

g réalise donc une bijection de $]-\infty\,;0\,[$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ (voir limites).

Or $n\in\,]\,0\,;+\infty\,[$ car $n\geq 2$, donc l'équation (E_n) admet exactement une solution dans $]-\infty\,;0\,[$, notée α_n

De même g réalise une bijection strictement croissante de $]\,0\,;+\infty\,[$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

donc l'équation (E_n) admet exactement une solution dans $]\,0\,;+\infty\,[$ notée β_n

Enfin 0 n'est clairement pas solution de l'équation (E_n)

2. (a) $g(-1)=1+\frac{1}{e}$ et $g(-2)=2+\frac{1}{e^2}$ donc $g(-1)\leq 2\leq g(-2)$ c'est-à-dire $g(-1)\leq g(\alpha_2)\leq g(-2)$

Or -2 , α_2 , -1 sont strict négatifs et g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0\,[$ donc $-2\leq\alpha_2\leq-1$

(b) $e^{\alpha_2}-2=\alpha_2\Leftrightarrow e^{\alpha_2}-\alpha_2=2\Leftrightarrow g(\alpha_2)=2$ donc cette égalité est vraie

Récurrence :

$P(0)$ vraie car $\alpha_2\leq-1$

Si $\alpha_2\leq u_k\leq-1$ alors $e^{\alpha_2}\leq e^{u_k}\leq e^{-1}$ puis $e^{\alpha_2}-2\leq e^{u_k}-2\leq e^{-1}-2$

Or $e^{\alpha_2}-2=\alpha_2$, $u_{k+1}=e^{u_k}-2$ et $\frac{1}{e}-2\leq-1$ car $\frac{1}{e}\leq 1$

Donc $\alpha_2\leq u_{k+1}\leq-1$, et $P(k)\Rightarrow P(k+1)$

(c) Prenons $u(t)=e^t$ pour $t\leq-1$. On a $u'(t)=e^t$ donc $\forall t\leq-1$, $0\leq u'(t)\leq\frac{1}{e}$

En utilisant l'IAF avec a et b tels que $a\leq b\leq-1$, il vient $0\leq e^b-e^a\leq\frac{1}{e}(b-a)$

(d) Pour tout entier naturel k , $u_{k+1}-\alpha_2=e^{u_k}-2-\alpha_2=e^{u_k}-e^{\alpha_2}$ car $e^{\alpha_2}-\alpha_2=2$

Récurrence

$H(0)$ est vraie car $u_0 - \alpha_2 = -1 - \alpha_2$ et comme $-2 \le \alpha_2 \le -1$ alors $0 \le -1 - \alpha_2 \le 1$]

Si $0 \le u_k - \alpha_2 \le \left(\frac{1}{e}\right)^k$ alors comme $\alpha_2 \le u_k \le -1$ e 1.(c) s'applique : $0 \le e^{u_k} - e^{\alpha_2} \le \frac{1}{e}(u_k - \alpha_2)$

Donc $0 \le u_{k+1} - \alpha_2 \le \frac{1}{e}(u_k - \alpha_2) \le \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^k$ et $H(k) \Rightarrow H(k+1)$

(e) $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ donc $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = 0$

Par encadrement , $\lim_{k \to +\infty} u_k - \alpha_2 = 0$ donc $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente et de limite α_2

(f) $Ent(-\ln(\varepsilon)) + 1 \ge -\ln(\varepsilon)$ donc $N \ge -\ln(\varepsilon)$, puis $-N \le \ln(\varepsilon)$ et $e^{-N} \le \varepsilon$ donc $\left(\frac{1}{e}\right)^N \le \varepsilon$

Partie pointillée du programme : **u := exp(u) - 2 ;**

3.

(a) $g(\ln n) = n - \ln(n)$ or $n > 1$ donc $g(\ln(n)) \le n$

De plus 1 est un minimum absolu pour g , donc $1 \le g(\ln n) \le n$.

$g(\ln(2n)) = 2n - \ln(2n) = n + (n - \ln(n) - \ln 2)$

Or d'après ce qui précède , $n - \ln(n) \ge 1$ donc $n - \ln(n) - \ln 2 \ge 1 - \ln 2 \ge 0$, donc $g(\ln(2n)) \ge n$

(b) Ainsi $g(\ln(n)) \le g(\beta_n) \le g(\ln(2n))$ et comme $\ln(n)$, β_n , $\ln(2n)$ sont strictement positifs et que g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, il vient $\ln(n) \le \beta_n \le \ln(2n)$ **[1]** , puis $1 \le \frac{\beta_n}{\ln(n)} \le \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + 1$

Par encadrement , $\lim_{n \to +\infty} \frac{\beta_n}{\ln(n)} = 1$ d'où $\beta_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$

EXERCICE 3

1. (a) f est continue comme fonction classique sur $]-\infty ; 0[$, $[0 ; R]$, $]R ; +\infty[$

D'autre part $\lim_{t \to 0-} f(t) = 0 = f(0)$ et $\lim_{t \to R+} f(t) = 0 \ne f(R)$

Donc f est continue sur $]-\infty ; R]$, $]R ; +\infty[$ mais non continue à droite en R

(b) f est nulle en dehors de $[0 ; R]$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\int_0^R \frac{2t}{R^2}\, dt = \frac{1}{R^2}\left[t^2\right]_0^R = 1$

f est positive sur $\mathbb{R}$, et f est continue sur $\mathbb{R} - \{R\}$.

Finalement f est une densité de probabilité.

2. (a) $F_X(x) = 0$ lorsque $x < 0$, $F_X(x) = 1$ lorsque $x > R$ car $X(\Omega) = [0; R]$

(b) Pour tout réel x de $[0 ; R]$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0 + \int_0^x \frac{2t}{R^2}\, dt = \frac{1}{R^2}\left[t^2\right]_0^x = \frac{x^2}{R^2}$

3 (a) f est nulle hors de $[0 ; R]$ donc $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)dt$ converge et vaut $\int_0^R \frac{2t^2}{R^2}\, dt = \frac{1}{R^2}\left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^R = \frac{2R}{3}$

(b) f est nulle hors de $[0 ; R]$ donc $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ f(t)dt$ converge et vaut $\int_0^R \frac{2t^3}{R^2}\, dt = \frac{1}{R^2}\left[\frac{2t^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^2}{2}$

Par le théorème de Koenig-Huyghens, X admet une variance et que $V(X) = \frac{R^2}{2} - \frac{4R^2}{9} = \frac{R^2}{18}$

4. Par linéarité , $E(T_n) = \frac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2R}{3} = R$ donc T_n est un estimateur sans biais de R

On a alors $r(T_n) = V(T_n)$ et par indépendance des (X_k), $V(T_n) = \frac{9}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{9}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2}{18} = \frac{R^2}{8n}$

5. (a) Par indépendance des (X_k), $P(M_n \le x) = P(X_1 \le x)\,P(X_2 \le x) \cdots P(X_n \le x) = (F_X(x))^n$

Donc si $x < 0$, $F_{M_n}(x) = 0$, si $0 \le x \le R$, $F_{M_n}(x) = \left(\frac{x^2}{R^2}\right)^n$, si $x > R$, $F_{M_n}(x) = 1$

F_{M_n} est continue comme fonction classique sur $]-\infty;0[$, $]0,R[$, $]R;+\infty[$

D'autre part $\lim_{t \to 0-} F_{M_n}(t) = 0 = F_{M_n}(0)$ et $\lim_{t \to R+} F_{M_n}(t) = 1 = F_{M_n}(R)$ donc F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$

F_{M_n} est de classe C1 comme fonction classique sur $]-\infty;0[$, $]0,R[$, $]R;+\infty[$

Donc F_{M_n} est C1 sur $\mathbb{R} - \{0, R\}$. Finalement M_n est une variable aléatoire à densité.

(b) Par dérivation sur $\mathbb{R} - \{0, R\}$ et complétion arbitraire, une densité possible de M_n est la fonction g_n.

(c) g_n est nulle en dehors de $[0\,;R]$ donc $E(M_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_n(t)dt$ converge et vaut

$$\int_0^R \frac{2n\, t^{2n}}{R^{2n}}\, dt = \frac{2n}{R^{2n}}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^R = \frac{2n\, R}{2n+1}$$

g_n est nulle en dehors de $[0\,;R]$ donc $E(M_n^{\ 2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g_n(t)dt$ converge et vaut

$$\int_0^R \frac{2n\, t^{2n+1}}{R^{2n}}\, dt = \frac{2n}{R^{2n}}\left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^R = \frac{n\, R^2}{n+1}$$

Par formule de Koenig-Huyghens, M_n admet une variance et

$$V(M_n) = \frac{n\, R^2}{n+1} - \left(\frac{2n\, R}{2n+1}\right)^2 = R^2\left(\frac{n}{n+1} - \frac{4n^2}{(2n+1)^2}\right) = \dots = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}\, R^2$$

(d) $b(M_n) = E(M_n) - R = \frac{-R}{2n+1}$ et $r(M_n) = V(M_n) + (b(M_n))^2 = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2} R^2 + \left(\frac{-R}{2n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} R^2$

6. a) $b(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-R}{2n}$ et $r(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{R^2}{2n^2}$

(b) T_n a un meilleur biais et M_n a un meilleur risque quadratique.