EDHEC 2006 : corrigé succinct

Exercice 1 : 1°) a) en posant $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on résout AX=(0) et on trouve des solutions du type $\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix}$ donc Kerf=Vect(u). *(Remarque : la vérification f(u)=0 ne suffit pas !)*

b) Kerf n'étant pas réduit au vecteur nul f n'est pas bijectif donc A non inversible.

2°) a) grâce à un calcul matriciel on trouve v=(3, 1, -2).

b) on recherche w de la forme (x, 1, z) avec f(w)=v et on trouve bien w=(0, 1, -1).

c) on vérifie aisément que B'est une famille libre ; elle a 3 vecteurs et on travaille dans un espace de dimension 3 donc B' est une base.

3°) a) on pourrait utiliser la formule de changement de base : $N=P^{-1}AP$ mais il est beaucoup plus rapide de procéder ainsi : f(u)=0, f(v)=u et f(w)=v d'où $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. N étant triangulaire les valeurs propres de f sont les termes diagonaux de N donc la seule valeur propre est 0 ; or le sous-espace propre associé est Kerf de dimension 1 donc f pas diagonalisable. *(si f était diagonalisable f serait nul !)*

b) on vérifie que $N^3=(0)$ donc $A^3=(0)$ (car $A^3=PN^3P^{-1}$) puis, par récurrence immédiate, $A^n=(0)$ pour tout entier $n\geq 3$.

4°) a) on a clairement : $C_N\subset \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$, $C_N\neq \emptyset$ et on vérifie simplement que C_N est stable pour l'addition et la multiplication par un réel donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$. Ensuite on cherche les matrices du type $M=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ vérifiant MN=NM et on trouve : b=c=f=0, e=i=a et d=h donc on obtient M=aI+dN+gN² ce qui prouve le résultat.

b)

$M\in C_N \Leftrightarrow MN=NM \Leftrightarrow MPAP^{-1}=PAP^{-1}M \Leftrightarrow MPAP^{-1}P=PAP^{-1}MP$ (*en multipliant tout par* P*à droite*) $\Leftrightarrow$ MPA

$\Leftrightarrow P^{-1}MPA=P^{-1}PAP^{-1}MP$(*en multipliant tout par* P^{-1}*à gauche*) $\Leftrightarrow (P^{-1}MP)A=A(P^{-1}MP)\Leftrightarrow P^{-1}MP\in C_A$.

On en déduit que $P^{-1}MP=aI+bN+cN^2$ soit $M=aI+bPNP^{-1}+cPN^2P^{-1}$ soit enfin $M=aI+bA+cA^2$ d'où C_A=Vect(I, A, A²). Enfin (I, N, N²) est une famille libre (vérification triviale) donc (I, A, A²) aussi (car si aI+bA+cA²=(0) alors, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, aI+bN+cN²=(0) soit a=b=c=0) donc (I, A, A²)est une base de C_A d'où C_A de dimension 3.

Exercice 2 : 1°) f est définie et positive sur **R**, continue sur **R** sauf peut-être en 0, $\frac{1}{2}$ et 1 ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(1-t)^2}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2t^2}dt=\left[\frac{1}{2(1-t)}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[-\frac{1}{2t}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\left[1-\frac{1}{2}\right]+\left[-\frac{1}{2}+1\right]=1$$ d'où f densité.

2°) par définition $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ donc, après des calculs d'intégrales simples : F(x)=0 si x<0,

$F(x)=\int_0^x \frac{1}{2(1-t)^2}dt=\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2}$ sur $[0,\frac{1}{2}]$, $F(x)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2(1-t)^2}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{1}{2t^2}dt=\frac{3}{2}-\frac{1}{2t}$ sur $[\frac{1}{2},1]$ et enfin F(x)=1 si x >1.

3°) sous réserve d'existence $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

$$=\int_0^{\frac12}\frac{t}{2(1-t)^2}dt+\int_{\frac12}^1\frac{t}{2t^2}dt=\int_0^{\frac12}\frac{t}{2(1-t)^2}dt+\int_{\frac12}^1\frac{1}{2t}dt=\int_0^{\frac12}\frac{t}{2(1-t)^2}dt+\left[\frac12\ln(t)\right]_{\frac12}^1=\int_0^{\frac12}\frac{t}{2(1-t)^2}dt+\frac{\ln 2}{2}$$

pour l'intégrale restante on peut faire une IPP en posant : $u(t)=\frac{t}{2}$ et $v'(t)=\frac{1}{(1-t)^2}$ on a alors

$u'(t)=\frac12$ et $v(t)=\frac{1}{(1-t)}$ (u et v étant de classe C^1 sur **R**) on obtient $E(X)=\left[\frac{t}{2(1-t)}\right]_0^{\frac12}-\int_0^{\frac12}\frac{1}{2(1-t)}dt+\frac{\ln 2}{2}$

$$=\frac12-\left[\frac{-\ln(1-t)}{2}\right]_0^{\frac12}+\frac{\ln 2}{2}=\frac12-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 2}{2}=\frac12.$$

4°) a) sous réserve d'existence $E[(X-1)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-1)^2f(t)dt=\int_0^{\frac12}\frac12 dt+\int_{\frac12}^1\frac{(t-1)^2}{2t^2}dt$

$$=\frac14+\int_{\frac12}^1\frac{t^2-2t+1}{2t^2}dt=\frac14+\int_{\frac12}^1\frac12-\frac1t+\frac{1}{2t^2}dt=\frac14+\left[\frac t2-\ln(t)-\frac{1}{2t}\right]_{\frac12}^1=\ldots=1-\ln 2.$$

b) on a par linéarité de l'espérance : $E[(X-1)^2]=E[X^2]-2E(X)+1=E[X^2]$ donc

$V(X)=E[X^2]-E(X)^2=1-\ln 2-\frac14=\frac34-\ln 2.$

5°) a) les événements $(X\le\frac12)$ et $(X>\frac12)$ étant contraires on a Y+Z=1 soit, par exemple,

Z=1-Y d'où $\rho(Y,Z)=\rho(Y,1-Y)=-1$.

b) par définition $\rho(Y,Z)=\frac{\text{cov}(Y,Z)}{\sigma(Y)\sigma(Z)}=-1$, or $\sigma(Y)=\sigma(Z)$ donc on en déduit

$\text{cov}(Y,Z)=-[\sigma(Y)]^2=-V(Y)=-P(X\le\frac12)=-F(\frac12)=-\frac12.$

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ (somme de fonctions de classes C^1, et
$p = f'_x(x, y) = 4x + 2y - 1$;
$q = f'_y(x, y) = 4y + 2x - 1$.

(b) (x, y) est un point critique de f ssi

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=1\\2x+4y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=1\\ 6y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac16\\ y=\frac16\end{cases}$$

Le seul point critique de f est $A=\left(\frac16,\frac16\right)$.

2. (a) f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ (somme de fonctions de classe C^2) et
$r=f''_{x^2}(x,y)=4$; $s=f''_{xy}(x,y)=2$; $t=f''_{y^2}(x,y)=4$.

(b) Au point A, p = q = 0 ; $rt-s^2 = 4\times4 - 4 = 12 > 0$; r = 4 > 0.

Donc f présente un minimum local en A et ce minimum est égal à $m = f(A) = -\frac16$.

3. (a) Formule $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$:

$$2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{16}+xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(y^2+\frac{1}{36}-\frac{y}{3}\right)$$

$$=2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{16}+xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(y^2+\frac{1}{36}-\frac{y}{3}\right)$$

$$=2x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{8}+2xy-x-\frac{y}{2}+\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{24}-\frac{y}{2}$$

$$=2x^2+2y^2+2xy-x-y+\frac{1}{6}=f(x,y)+\frac{1}{6}$$

(b) Pour tout (x, y) $f(x, y) + \frac{1}{6}$ est égal à une somme de deux carrés, donc

$\forall(x, y) \in \mathbf{R}$, $f(x, y) + \frac{1}{6} \geq 0$, $f(x, y) \geq -\frac{1}{6} = m = f(A)$

m est donc le minimum global de f sur $\mathbf{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbf{R}^2$ par :
$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.

(a) On a, pour tout (x, y), $g(x, y) = f(e^x, e^y) \geq -\frac{1}{6}$

(b) $g(x, y) = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow f(e^x, e^y) = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow (e^x, e^y) = \left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ d'après 3°) b) $\Leftrightarrow x = y = -\ln(6)$.

Donc pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(x, y) \geq g(-\ln(6), -\ln(6))$.
Donc g possède un minimum global sur $\mathbf{R}^2$ atteint au point $(-\ln(6), -\ln(6))$.

<u>Problème :</u> PARTIE 1

1°) $P(X\geq 1)=1 - P(X = 0) = 1 - p = q$ or $p > 0$ donc $q < 1$ et $P(X\geq 1) > 0$ donc $q > 0$ d'où : $0 < q < 1$.

2°) $P(X \geq n + m / X \geq m) = \frac{P[(X \geq n+m) \cap (X \geq m)]}{P(X \geq m)}$ par définition, d'où

$P(X \geq n) = \frac{P(X \geq n+m)}{P(X \geq m)}$, soit finalement : $P(X \geq n + m) = P(X \geq n)\, P(X \geq m)$.

3°) a) $u_{n+1} = P(X \geq n + 1) = P(X \geq n)\, P(X \geq 1)$ soit $u_{n+1} = qu_n$ suite géométrique !

b) $u_n = u_0 q^n = q^n$ car $u_0=P(X\geq 0) = 1$

c) $(X \geq n) = (X \geq n + 1) \cup (X = n)$, la réunion est disjointe, donc $P(X \geq n) = P(X \geq n+1) + P(X=n)$, d'où le résultat.

d) On a donc $P(X = n) = P(X \geq n + 1) - P(X \geq n) = q^{n+1} - q^n = q^n (1 - q) = q^n p$.

4°) a) $P(X + 1 = n) = P(X = n -1) = q^{n-1}p$ donc X + 1 suit une loi géométrique sur **N*** de paramètre p.

b) $E(X + 1) = \frac{1}{p}$, donc $E(X) = \frac{1}{p} - 1$; $V(X+1) = \frac{1-p}{p^2}$ donc $V(X) = V(X + 1) = \frac{1-p}{p^2}$.

PARTIE 2

1°) a) Par définition $P(Y = n / Y \geq n) = \frac{P(Y = n \cap Y \geq n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}$ soit le résultat demandé.

b) $1 - \lambda_n = 1 - \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y \geq n) - P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)}$ C.Q.F.D.

c) $(Y \geq n+1) \subset (Y \geq n)$ donc $P(Y \geq n+1) \leq P(Y \geq n)$ et comme les probabilités sont toutes positives il vient : $0 < \dfrac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)} \leq 1$ d'où : $0 \leq \lambda_n < 1$

d) RPR sans difficulté car pour l'hérédité on utilise : $P(Y \geq n+1) = P(Y \geq n)(1-\lambda_n)$ (1°) b)).

2°) a) Trivial car $P(Y \geq n) + P(Y < n) = 1$ et $P(Y < n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k)$.

b) $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$ d'où le résultat par différence des limites.

c) D'après 1°)d), $P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$, donc en prenant le logarithme il vient :

$\ln[P(Y \geq n)] = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\lambda_k)$ or $\lim_{n \to +\infty} P(Y \geq n) = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} \ln[P(Y \geq n)] = -\infty$, d'où le résultat !!

d) Si le terme général de la série (λ_n) ne tend pas vers 0 la série diverge ; il suffit donc d'étudier le cas où λ_n tend vers 0 : on a alors $-\ln(1-\lambda_n) \sim \lambda_n$; or ce sont 2 séries à termes positifs, l'une est divergente ($-\ln(1-\lambda_n)$)) donc l'autre diverge aussi. Conclusion : la série λ_n est toujours divergente.

3°) a)
```
if (n = 0) then f :=1 {traduit 0 ! =1}
else f:=n*f(n-1); {car n!=n(n -1)!}.
```

b) $g(a, 0) = 1$ et si $n \neq 0$ $g(a, n) = g(a, n-1) \times a$ donc on obtient $g(a, n) = a^n$ (suite géométrique) ; on peut regrouper ces 2 cas en : $g(a, n) = a^n$ pour tout n de **N**.

c) si on note S la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{a^k}{k!}$ il faut l'initialiser avec `S:=1;` , puis faire le calcul grâce à :

```
for k:=1 to n - 1 do S:=S + g(a,k)/f(k);
```

le calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{a^k}{k!} e^{-a}$ s'écrit : `T:=S*exp(-a);`

Pour une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre a on trouve

$$\lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{\frac{a^n}{n!} e^{-a}}{1 - P(Y < n)} = \frac{\frac{a^n}{n!} e^{-a}}{1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}}$$ soit en Pascal :

```
TAUX :=(g(a,n)/f(n)*exp(-a))/(1-T) ;
```

d)
```
for k:=1 to n-1 do
   begin
     p:=p*a/k;
     s:=s + p; {calcule ∑_{k=0}^{n-1} a^k/k!}
   end ;
 s:=s*exp(-a);  {calcule ∑_{k=0}^{n-1} a^k/k! e^{-a} }
```

PARTIE 3

1°) $\lambda_n = \dfrac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \dfrac{pq^n}{q^n} = p$ (taux de panne constant).

2°) a) on a déjà vu que $0 \leq \lambda_n < 1$ (PARTIE 2 1°)c)) donc $0 \leq \lambda_n < 1$; si $\lambda_n = 0$ on aurait $p(Z = n) = 0$ pour tout n de **N** ce qui est impossible donc : $0 < \lambda < 1$.

b) $P(Z \geq n) = (1-\lambda)^n$ (PARTIE 2 1°)d)).

c) $P(Z = n) = P(Z \geq n) - (P(Z \geq n+1) = (1-\lambda)^n - (1-\lambda)^{n+1} = \lambda(1-\lambda)^n$ du type pq^n avec $p = \lambda$.