

EDHEC 2006 : corrigé succinct

Exercice 1 : 1°) a) en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on résout $AX=(0)$ et on trouve des solutions du type $\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix}$ donc

$\text{Kerf} = \text{Vect}(u)$. (Remarque : la vérification $f(u)=0$ ne suffit pas !)

b) Kerf n'étant pas réduit au vecteur nul f n'est pas bijectif donc A non inversible.

2°) a) grâce à un calcul matriciel on trouve $v=(3, 1, -2)$.

b) on recherche w de la forme $(x, 1, z)$ avec $f(w)=v$ et on trouve bien $w=(0, 1, -1)$.

c) on vérifie aisément que B' est une famille libre ; elle a 3 vecteurs et on travaille dans un espace de dimension 3 donc B' est une base.

3°) a) on pourrait utiliser la formule de changement de base : $N=P^{-1}AP$ mais il est beaucoup

plus rapide de procéder ainsi : $f(u)=0, f(v)=u$ et $f(w)=v$ d'où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. N étant triangulaire les valeurs

propres de f sont les termes diagonaux de N donc la seule valeur propre est 0 ; or le sous-espace propre associé est Kerf de dimension 1 donc f pas diagonalisable. (si f était diagonalisable f serait nul !)

b) on vérifie que $N^3=(0)$ donc $A^3=(0)$ (car $A^3=PN^3P^{-1}$) puis, par récurrence immédiate, $A^n=(0)$ pour tout entier $n \geq 3$.

4°) a) on a clairement : $C_N \subset M_3(\mathbf{R}), C_N \neq \emptyset$ et on vérifie simplement que C_N est stable pour l'addition et la multiplication par un réel donc C_N est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$. Ensuite on cherche

les matrices du type $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ vérifiant $MN=NM$ et on trouve : $b=c=f=0, e=i=a$ et $d=h$ donc on obtient

$M=aI+dN+gN^2$ ce qui prouve le résultat.

b)

$M \in C_N \Leftrightarrow MN = NM \Leftrightarrow MPAP^{-1} = PAP^{-1}M \Leftrightarrow MPAP^{-1}P = PAP^{-1}MP$ (en multipliant tout par P à droite) $\Leftrightarrow MPA$

$\Leftrightarrow P^{-1}MPA = P^{-1}PAP^{-1}MP$ (en multipliant tout par P^{-1} à gauche) $\Leftrightarrow (P^{-1}MP)A = A(P^{-1}MP) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_A$.

On en déduit que $P^{-1}MP=aI+bN+cN^2$ soit $M=aI+bPNP^{-1}+cPN^2P^{-1}$ soit enfin $M=aI+bA+cA^2$ d'où

$C_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$. Enfin (I, N, N^2) est une famille libre (vérification triviale) donc (I, A, A^2) aussi (car si $aI+bA+cA^2=(0)$ alors, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par $P, aI+bN+cN^2=(0)$ soit $a=b=c=0$) donc (I, A, A^2) est une base de C_A d'où C_A de dimension 3.

Exercice 2 : 1°) f est définie et positive sur \mathbf{R} , continue sur \mathbf{R} sauf peut-être en $0, \frac{1}{2}$ et 1 ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(1-t)^2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2t^2} dt = \left[\frac{1}{2(1-t)} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{2t} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left[1 - \frac{1}{2} \right] + \left[-\frac{1}{2} + 1 \right] = 1 \text{ d'où } f \text{ densité.}$$

2°) par définition $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ donc, après des calculs d'intégrales simples : $F(x)=0$ si $x < 0$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t)^2} dt = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2} \text{ sur } [0, \frac{1}{2}], F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(1-t)^2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{2t^2} dt = \frac{3}{2} - \frac{1}{2t} \text{ sur } [\frac{1}{2}, 1] \text{ et enfin}$$

$F(x)=1$ si $x > 1$.

$$3^\circ) \text{ sous réserve d'existence } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2(1-t)^2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{2t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2(1-t)^2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2t} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2(1-t)^2} dt + \left[\frac{1}{2} \ln(t) \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2(1-t)^2} dt + \frac{\ln 2}{2}$$

pour l'intégrale restante on peut faire une IPP en posant : $u(t) = \frac{t}{2}$ et $v'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ on a alors

$$u'(t) = \frac{1}{2} \text{ et } v(t) = \frac{1}{(1-t)} \text{ (u et v étant de classe } C^1 \text{ sur } \mathbf{R}) \text{ on obtient } E(X) = \left[\frac{t}{2(1-t)} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(1-t)} dt + \frac{\ln 2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{-\ln(1-t)}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$4^\circ) \text{ a) sous réserve d'existence } E[(X-1)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2 f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(t-1)^2}{2t^2} dt$$

$$= \frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^2 - 2t + 1}{2t^2} dt = \frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) dt = \frac{1}{4} + \left[\frac{t}{2} - \ln(t) - \frac{1}{2t} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \dots = 1 - \ln 2.$$

b) on a par linéarité de l'espérance : $E[(X-1)^2] = E[X^2] - 2E(X) + 1 = E[X^2]$ donc

$$V(X) = E[X^2] - E(X)^2 = 1 - \ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

5°) a) les événements $(X \leq \frac{1}{2})$ et $(X > \frac{1}{2})$ étant contraires on a $Y+Z=1$ soit, par exemple, $Z=1-Y$ d'où $\rho(Y,Z) = \rho(Y,1-Y) = -1$.

b) par définition $\rho(Y,Z) = \frac{\text{cov}(Y,Z)}{\sigma(Y)\sigma(Z)} = -1$, or $\sigma(Y) = \sigma(Z)$ donc on en déduit

$$\text{cov}(Y,Z) = -[\sigma(Y)]^2 = -V(Y) = -P(X \leq \frac{1}{2}) = -F(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de \mathbf{R}^2 par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) f est de classe C^1 sur \mathbf{R}^2 (somme de fonctions de classes C^1 , et

$$p = f'_x(x, y) = 4x + 2y - 1;$$

$$q = f'_y(x, y) = 4y + 2x - 1.$$

(b) (x, y) est un point critique de f ssi

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 6y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$.

2. (a) f est de classe C^2 sur \mathbf{R}^2 (somme de fonctions de classe C^2) et

$$r = f''_{x^2}(x, y) = 4; \quad s = f''_{xy}(x, y) = 2; \quad t = f''_{y^2}(x, y) = 4.$$

(b) Au point A , $p = q = 0$; $rt - s^2 = 4 \times 4 - 4 = 12 > 0$; $r = 4 > 0$.

Donc f présente un minimum local en A et ce minimum est égal à $m = f(A) = -\frac{1}{6}$.

3. (a) Formule $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$:

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 &= 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y^2 + \frac{1}{36} - \frac{y}{3}\right) \\ &= 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y^2 + \frac{1}{36} - \frac{y}{3}\right) \\ &= 2x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{8} + 2xy - x - \frac{y}{2} + \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{24} - \frac{y}{2} \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6} = f(x, y) + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) Pour tout (x, y) $f(x, y) + \frac{1}{6}$ est égal à une somme de deux carrés, donc

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}, f(x, y) + \frac{1}{6} \geq 0, f(x, y) \geq -\frac{1}{6} = m = f(A)$$

m est donc le minimum global de f sur \mathbf{R}^2 .

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de \mathbf{R}^2 par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

(a) On a, pour tout (x, y) , $g(x, y) = f(e^x, e^y) \geq -\frac{1}{6}$

(b) $g(x, y) = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow f(e^x, e^y) = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow (e^x, e^y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ d'après 3°) b) $\Leftrightarrow x = y = -\ln(6)$.

Donc pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(x, y) \geq g(-\ln(6), -\ln(6))$.

Donc g possède un minimum global sur \mathbf{R}^2 atteint au point $(-\ln(6), -\ln(6))$.

Problème : PARTIE 1

1°) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p = q$ or $p > 0$ donc $q < 1$ et $P(X \geq 1) > 0$ donc $q > 0$ d'où : $0 < q < 1$.

2°) $P(X \geq n + m / X \geq m) = \frac{P[(X \geq n + m) \cap (X \geq m)]}{P(X \geq m)}$ par définition, d'où

$$P(X \geq n) = \frac{P(X \geq n + m)}{P(X \geq m)}, \text{ soit finalement : } P(X \geq n + m) = P(X \geq n) P(X \geq m).$$

3°) a) $u_{n+1} = P(X \geq n + 1) = P(X \geq n) P(X \geq 1)$ soit $u_{n+1} = qu_n$ suite géométrique !

b) $u_n = u_0 q^n = q^n$ car $u_0 = P(X \geq 0) = 1$

c) $(X \geq n) = (X \geq n + 1) \cup (X = n)$, la réunion est disjointe, donc $P(X \geq n) = P(X \geq n + 1) + P(X = n)$, d'où le résultat.

d) On a donc $P(X = n) = P(X \geq n + 1) - P(X \geq n) = q^{n+1} - q^n = q^n(1 - q) = q^n p$.

4°) a) $P(X + 1 = n) = P(X = n - 1) = q^{n-1} p$ donc $X + 1$ suit une loi géométrique sur \mathbf{N}^* de paramètre p .

b) $E(X + 1) = \frac{1}{p}$, donc $E(X) = \frac{1}{p} - 1$; $V(X + 1) = \frac{1 - p}{p^2}$ donc $V(X) = V(X + 1) = \frac{1 - p}{p^2}$.

PARTIE 2

1°) a) Par définition $P(Y = n / Y \geq n) = \frac{P(Y = n \cap Y \geq n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}$ soit le résultat demandé.

b) $1 - \lambda_n = 1 - \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y \geq n) - P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{P(Y \geq n + 1)}{P(Y \geq n)}$ C.Q.F.D.

c) $(Y \geq n+1) \subset (Y \geq n)$ donc $P(Y \geq n+1) \leq P(Y \geq n)$ et comme les probabilités sont toutes positives il vient : $0 < \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)} \leq 1$ d'où : $0 \leq \lambda_n < 1$

d) RPR sans difficulté car pour l'hérédité on utilise : $P(Y \geq n+1) = P(Y \geq n)(1 - \lambda_n)$ (1° b)).

2°) a) Trivial car $P(Y \geq n) + P(Y < n) = 1$ et $P(Y < n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$ d'où le résultat par différence des limites.

c) D'après 1°)d), $P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$, donc en prenant le logarithme il vient :

$$\ln[P(Y \geq n)] = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \lambda_k) \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y \geq n) = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln[P(Y \geq n)] = -\infty, \text{ d'où le résultat !!}$$

d) Si le terme général de la série (λ_n) ne tend pas vers 0 la série diverge ; il suffit donc d'étudier le cas où λ_n tend vers 0 : on a alors $-\ln(1 - \lambda_n) \sim \lambda_n$; or ce sont 2 séries à termes positifs, l'une est divergente ($-\ln(1 - \lambda_n)$) donc l'autre diverge aussi. Conclusion : la série λ_n est toujours divergente.

3°) a) if $(n = 0)$ then **f := 1** {traduit $0! = 1$ }

else **f := n*f(n-1)**; {car $n! = n(n-1)!$ }.

b) $g(a, 0) = 1$ et si $n \neq 0$ $g(a, n) = g(a, n-1) \times a$ donc on obtient $g(a, n) = a^n$ (suite géométrique) ; on peut regrouper ces 2 cas en : $g(a, n) = a^n$ pour tout n de \mathbf{N} .

c) si on note S la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!}$ il faut l'initialiser avec **S := 1** ; , puis faire le calcul grâce à :

for k:=1 to n - 1 do S:=S + g(a,k)/f(k) ;

le calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ s'écrit : **T:=S*exp(-a)** ;

Pour une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre a on trouve

$$\lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{\frac{a^n}{n!} e^{-a}}{1 - P(Y < n)} = \frac{\frac{a^n}{n!} e^{-a}}{1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}} \text{ soit en Pascal :}$$

TAUX := (g(a,n)/f(n)*exp(-a))/(1-T) ;

d) **for k:=1 to n-1 do**

begin

p:=p*a/k ;

s:=s + p ; {calcule $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!}$ }

end ;

s:=s*exp(-a) ; {calcule $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ }

PARTIE 3

1°) $\lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{pq^n}{q^n} = p$ (taux de panne constant).

2°) a) on a déjà vu que $0 \leq \lambda_n < 1$ (PARTIE 2 1°)c) donc $0 \leq \lambda_n < 1$; si $\lambda_n = 0$ on aurait $p(Z = n) = 0$ pour tout n de \mathbf{N} ce qui est impossible donc : $0 < \lambda < 1$.

b) $P(Z \geq n) = (1 - \lambda)^n$ (PARTIE 2 1°)d).

c) $P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) = (1 - \lambda)^n - (1 - \lambda)^{n+1} = \lambda(1 - \lambda)^n$ du type pq^n avec $p = \lambda$.