ECRICOME 2006 : corrigé succinct

Exercice 1 : **1.1.** 1°) f étant de classe C^∞ sur **R** on peut la dériver et étudier le signe de f ' ;
f '(x) = 1+2e^x >0 sur **R** donc f strictement croissante ; $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$ (pas de FI à signaler).

2°) $\lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0$ donc la droite Δ d'équation : y=x+1 est asymptote à la courbe en $-\infty$ et la courbe est toujours au-dessus car 2e^x >0 sur **R**.

3°) f continue et strictement croissante sur **R** donc f réalise une bijection de **R** sur f(**R)= R** d'où l'existence et l'unicité de α ; enfin f(-2)=-1+2e^{-2}<0 et f(-1)=2e^{-1}>0 donc $\alpha \in [-2,-1]$.

4°) g étant de classe C^2 sur **R²** on peut calculer ses dérivées partielles du 1er ordre ; avec les notations usuelles on trouve : p=e^x(x+y²+1+2e^x) et q=2y e^x ; puisque e^x>0 on a p=q=0 $\Leftrightarrow$ y=0 et x+1+ 2e^x =0 soit y=0 et f(x)=0 : le seul point critique est donc A(α ,0).

5°) r= e^x(x+y²+2+4e^x), s=2y e^x et t=2 e^x donc en A : rt-s²=2e$^{2\alpha}$($\alpha + 2 + 4e^\alpha$)>0 car α >-2 (entre autres !) donc il y a un extremum local en A et comme r>0 il s'agit d'un minimum.

6°) β=g(α ,0)= e$^\alpha$ ($\alpha + 2e^\alpha$) or f(α)=0$\Leftrightarrow$ $e^\alpha = \dfrac{-\alpha-1}{2}$ en remplaçant il vient $\beta = \dfrac{-\alpha^2+1}{4}$ soit $4\beta = -\alpha^2+1$ ce qui est le résultat voulu.

1.2. 1°) f ''(x)=1+2e^x>0 donc f convexe sur **R**. On en déduit que la courbe est au-dessus de ses tangentes ! une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse x est y=f '(x)(t-x)+f(x) donc l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse t, soit f(t), est plus grande que l'ordonnée du point de T d'abscisse t c'est-à-dire : f(t)$\geq$ f '(x)(t-x)+f(x) … CQFD.

2°) remplaçons t par α et x par u_n dans l'inégalité précédente :
f(α)$\geq$ f '(u_n)(α - u_n)+f(u_n) soit : 0$\geq$ f '(u_n)(α - u_n)+f(u_n) divisons enfin tout par f '(u_n) (car f '(x)>0) et nous obtenons : $0 \geq \alpha - u_n + \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ soit : $0 \geq \alpha - u_{n+1}$ de par la définition de la suite (u_n).

Faisons un raisonnement par récurrence :
* initialisation : pour n=0 $u_0 = -1$, $u_1 = u_0 - \dfrac{f(-1)}{f'(-1)} < u_0$ car f(-1)<0 et f '(-1)>0 de plus $u_1 \geq \alpha$ d'après ce qui précède ; on a donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq -1$ ce qui est la propriété au rang n=0 ;
* hérédité : on suppose cette propriété vraie jusqu'à un certain entier N et vérifions la au rang N+1
$u_{N+1} - u_N = \dfrac{-f(u_N)}{f'(u_N)}$ du signe de f(u_N) car f '>0 or $u_N \geq \alpha$ (hypothèse de récurrence), f croissante et f(α)=0 font que $u_{N+1} - u_N \leq 0$ soit $u_{N+1} \leq u_N \leq -1$ (hypothèse de récurrence) ; enfin $\alpha \leq u_{N+1}$ a été démontré précédemment ; on a donc bien : $\alpha \leq u_{N+1} \leq u_N \leq -1$ ce qui est la propriété au rang N ;
* conclusion : pour tout n de **N** on a : $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$.

La suite est décroissante, minorée par donc elle converge vers un réel L ; si on fait tendre N vers dans la relation $u_{N+1} - u_N = \dfrac{-f(u_N)}{f'(u_N)}$ on en déduit que : $L = L - \dfrac{f(L)}{f'(L)}$ (car f et f 'sont continues) d'où f(L)=0 soit L=α .

3°)

a) on remplace x par u_n, on divise par f '(u_n) et on obtient : $0 \leq u_n - \alpha - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \dfrac{(u_n-\alpha)^2}{e f'(u_n)}$

soit $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{(u_n-\alpha)^2}{e}$ car f '(x)= 1+2e^x>1.

- b) * hérédité : de $0 \le u_{n+1} - \alpha \le \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$ (résultat du a)) et de $0 \le u_n - \alpha \le \frac{1}{e^{2^n - 1}}$ (hypothèse de récurrence) on en déduit : $0 \le u_{n+1} - \alpha \le \left(\frac{1}{e^{2^n-1}}\right)^2 * \frac{1}{e}$ or $\left(\frac{1}{e^{2^n-1}}\right)^2 * \frac{1}{e} = \frac{1}{e^{2*2^n-2+1}} = \frac{1}{e^{2^{n+1}-1}}$ ce qui est le résultat au rang n+1.

4°) Program ecricome ; *commentaires*

```
var p,n,k :integer ;
var u,q,r :real ;
function f(x :real) :real ;                  déclaration de f
function g(x:real):real;                     déclaration de f '
      begin
f:=x+1+2*exp(x);  g:=1+2*exp(x);
      end;
      BEGIN
Writeln('choix de p');
Readln(p);
q:=1; r:=1;                                  initialisations de 10^0 et de 2^0
For k:=1 to p do q:=q/10;                    calcul de 10^-p

Repeat   r:=2*r ;                            calcul de 2^n
 u := u –f(u)/g(u) ;                         calcul de u_n
Until 1/(exp(r)-1) <q;
Writeln('une valeur approchée de alpha est ',u);
      END.
```

<u>Exercice 2 :</u> 1°) $\frac{f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (croissances comparées d'une puissance et d'une exponentielle en $+\infty$) donc $f_n(x)$ négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

2°) f_n positive et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ dont l'intégrale de 1 à $+\infty$ converge (Riemann) donc $\int_1^{+\infty} f_n(x)dx$ converge ; sur [0,1] est continue donc $\int_0^1 f_n(x)dx$ existe ; grâce à la relation de Chasles $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente.

3°) a) $\int_0^A f_{n+2}(x)dx = \int_0^A x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2})\,dx = \int_0^A x^{n+1}[x\exp(-\frac{x^2}{2})]\,dx$

$=[x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2})]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n\exp(-\frac{x^2}{2})\,dx$ en posant pour l'IPP : $u(x)= x^{n+1}$ et $v'(x)= x\exp(-\frac{x^2}{2})$ d'où $u'(x)=(n+1)x^n$ et $v(x)= -\exp(-\frac{x^2}{2})$ avec u et v de classe C^1 sur **R**. Enfin on fait tendre A vers $+\infty$ et on obtient le résultat demandé.

b) on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx=\sqrt{2\pi}$ donc $I_0 = \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

c) $I_1 = \int_0^{+\infty} x\exp(-\frac{x^2}{2})dx = \lim_{A\to+\infty} [-\exp(-\frac{x^2}{2})]_0^A = 1$

d) RPR sans difficulté.

4°) a) f est définie positive sur **R**, continue sur **R** sauf peut-être en 0, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = I_1 = 1$.

b) i. sous réserve d'existence $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ d'après 3°)d)

ii. sous réserve d'existence $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = I_3 = 2$ d'après 3°)d) donc V(X) existe et vaut $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$

5°) a) $G(x) = P(X^2 \le x) = 0$ si $x<0$ et $G(x) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = F(\sqrt{x})$ car $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$ si $x \le 0$ et $F(x) = [-\exp(-\frac{t^2}{2})]_0^x = 1 - \exp(-\frac{x^2}{2})$ si $x > 0$.

b) on vérifie aisément que G est la fonction de répartition d'une variable à densité et que $G'(x) = 0$ si $x \le 0$ et $G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} F(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \exp(-\frac{x^2}{2})$ si $x > 0$ et on reconnaît la densité d'une loi Exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$; donc E(Y)= et V(Y)=

<u>Exercice 3 :</u> **3.1.** 1°) P étant un polynôme de degré au plus 2, P' est un polynôme de degré au plus 1 donc (x-1)P'(x) est un polynôme de degré au plus 2 additionné avec P on obtient donc un polynôme de degré au plus 2 : $f(P) \in E$; pour le morphisme on peut vérifier que : $f(aP_1 + bP_2) = af(P_1) + bf(P_2)$ grâce à la linéarité de la dérivation.

2°) si on Q_0, Q_1 et Q_2 les images de P_0, P_1 et P_2 par f on a : $Q_0(x) = P_0(x)$, $Q_1(x) = x-1 + P_1(x) = 2x-1 = 2P_1(x) - P_0(x)$, $Q_2(x) = (x-1)2x + P_2(x) = 3x^2 - 2x = 3P_2(x) - 2P_1(x)$; d'où A.

3°) A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont les termes diagonaux : 1, 2 et 3 ; A a 3 valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3 donc A est diagonalisable ; de plus aucune valeur propre n'est nulle donc A est inversible : f est donc diagonalisable et est un automorphisme.

4°) on vérifie que $f(R_0) = R_0$, $f(R_1) = 2R_1$ et $f(R_2) = 3R_2$

5°) (R_0, R_1, R_2) est une famille de 3 vecteurs propres (car tous non nuls) associés à 3 valeurs propres distinctes donc B' famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 : base de E.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6°) vérification élémentaire puis : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(on peut vérifier que $P^{-1}P = I_3$)*

7°) classique ! $D = P^{-1}AP$ (changement de base) puis $A = PDP^{-1}$ puis $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ et enfin par un RPR tout aussi classique : $(A^{-1})^n = P(D^{-1})^n P^{-1}$.

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ puis $(D^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$ et enfin $(A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{3^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{2}{2^n}-\frac{2}{3^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$

3.2. 1°) $(X_1=0, X_1=1, X_1=2)$ est un système complet d'événements donc grâce à la formule des probabilités totales on a :

$$P(X_2=0)=P(X_2=0/X_1=0)P(X_1=0)+P(X_2=0/X_1=1)P(X_1=1)+P(X_2=0/X_1=2)P(X_1=2)$$

soit $P(X_2=0)=1*\frac{1}{3}+\frac{1}{2}*\frac{1}{3}+\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{11}{18}$

de la même manière on trouve : $P(X_2=1)=\frac{5}{18}$ et $P(X_2=2)=\frac{1}{9}$.

2°) même chose qu'au 1°) mais avec le système complet d'événements suivant : $(X_k=0, X_k=1, X_k=2)$ et on trouve les 3 formules suivantes :

$$P(X_{k+1}=0)=1*P(X_k=0)+\frac{1}{2}*P(X_k=1)+\frac{1}{3}*P(X_k=2)$$

$$P(X_{k+1}=1)=0*P(X_k=0)+\frac{1}{2}*P(X_k=1)+\frac{1}{3}*P(X_k=2)$$

$$P(X_{k+1}=2)=0*P(X_k=0)+0*P(X_k=1)+\frac{1}{3}*P(X_k=2)$$

Et on retrouve les coefficients de la matrice A^{-1}.

3°) un RPR donne $U_k=(A^{-1})^k U_0$

4°) en remplaçant on obtient :

$P(X_k=0)=1-\frac{2}{2^k}+\frac{1}{3^k}\to 1$ quand k tend vers $+\infty$ (car $\frac{1}{2^k}$ et $\frac{1}{3^k}$ tendent vers 0)

$P(X_k=1)=\frac{2}{2^k}-\frac{1}{3^k}$ $\to 0$ quand k tend vers $+\infty$

$P(X_k=2)=\frac{1}{3^k}$ $\to 0$ quand k tend vers $+\infty$